МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ

ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические указания по решению задач
по высшей математике и основные теоремы высшей математики
для студентов 1 курса

Томск – 2014

Высшая математика 1: Основные алгоритмы решения задач
и основные теоремы по математике для студентов 1 курса
Сост. С.С. Журавлев, В.Д. Горбачев – Томск: Изд. ТПУ,2014. –100 с.

Рабочая программа составлена на основе Федерального компонента Государственного образовательного стандарта Министерства образования РФ и содержит задания и теоретическую часть по дисциплине

Рассмотрено и рекомендовано к использованию в учебном процессе
кафедрой высшей математики ТПУ “___” _________ 2014 г.

Заведующий кафедрой ВМ
Профессор, доктор физико-математических наук

Рабочая программа

Первый раздел.

Включает в себя числовые последовательности, теорему Вейерштрасса бесконечно большие последовательности, односторонние пределы замечательные пределы и их следствия, непрерывность функции и точки разрыва. Материал разделен на две части: основная теория, которая включает в себя ключевые понятия и определения, и практическая часть.

1. Числовые последовательности

1.1. Функция

1. Определение: Если для любого x∊X поставлен в соответствие y∊У, то говорят на множестве X задана функция с множеством значений У

   ∀x∊X ∃ y∊У f: X→У   y=f(x)

2. Способы задания: 1) Словесный
   2) Табличный
   3) Графический
   4) Аналитический
   А) явное задание y=f(x)
   Б) неявное задание F(x,y)=0

   График y=f(x) показывает геометрическое положение точек с координатами (x,f(x))

3. Классификация:

   f: x→y;   φ:Y→Z

   y=f(x);   φ(y)=z

   ψ:x→z   ψ(x)=z   -   Композиция функции f и φ или сложная функция

   если ∀y_0∊У ∃ x_0∊X, что f(x_0)=y_0, то f(x) – биекция

Функции

Элементарные   Неэлементарные

Алгебраические   Трансцендентные

Можно получить значение из аргумента и действительных чисел путем конечного числа операций   e=2,718 π=3,14

Операции

Рациональные (отсутствует извлечение корня) — Иррациональные

Целые рациональные

$Pn(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$

Дробно рациональные

$\frac{Pn(x)}{Pm(k)}$

4. Характеристики поведения функции:

1) Четность
   a. f(x) – четная, то D(f) симметрична относительно начала координат $f(-x)=f(x)\ \forall x\epsilon D(f)$
   b. f(x) – нечетная, то D(f) симметрична относительно начала координат $f(-x)=-f(x)\ \forall x\epsilon D(f)$
   c. Функция общего вида – функция не являющаяся четной или нечетной

2) Периодичность

Периодической называется функция $y=f(x)\neq const$, если $\exists t\neq 0$ такое, что
   a. $x+t$, $x-t\ \epsilon\ D(f)\ \ \forall x\epsilon D(f)$
   b. $f(x\pm t)=f(x)$

   t – период функции

3) Монотонность
   a. Функция y=f(x) – возрастающая (неубывающая) на интервале (a,b), если $\forall x_1,x_2\epsilon(a,b)$ таких что $x_1<x_2$ выполняется условие: $f(x_1)<f(x_2)$ или $f(x_1)\leq f(x_2)$
   b. Функция y=f(x) – убывающая (невозврастающая) на интервале (a,b), если $\forall x_1,x_2\epsilon(a,b)$ таких что $x_1<x_2$ выполняется условие: $f(x_1)>f(x_2)$ или $f(x_1)\geq f(x_2)$

4) Ограниченность
   a. Функция y=f(x) – ограниченная снизу, если $\forall a\epsilon R$ такое, что $a\leq f(x)\ \forall x\epsilon D(f)$
   b. Функция y=f(x) – ограниченная сверху, если $\forall a\epsilon R$ такое, что $a\geq f(x)\ \forall x\epsilon D(f)$
   c. Функция y=f(x) – ограниченная, если она ограничена и сверху и снизу т.е. $\forall a,b\epsilon R$ такие, что $a\geq f(x)\geq b\ \forall x\epsilon D(f)$

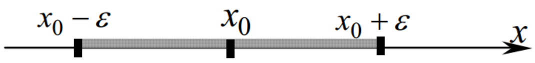
1.2. Числовые последовательности

1. Числовой последовательностью называется бесконечное множество чисел
2. Последовательность – это функция, заданная на множестве натуральных чисел
   a. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, a – предел последовательности, если можно задать сколь угодно малое число ε>0, то можно указать число x_N такое, что все без исключения числа a_n, стоящие после a_N (т.е. n>N) будут отличаться по абсолютному значению от a на величину меньше, чем ε

      $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N\in\mathbf{N},\ |x_n-a|<\varepsilon\ \forall n>N$

      геометрическая интерпретация

      Пусть $x_0\in R$ $\quad\varepsilon>0$



   $(x-\varepsilon;x+\varepsilon)$ – эпсилон окрестность точки x_0, $U(x_0;\varepsilon)=\{x\in R, |x-x_0|<\varepsilon\}$ (алгебраическое определение)

   b. Последовательность может иметь не больше одного предела. Если $\{x_n\}\to a$ и $\{x_n\}\to b$, то a=b. Возьмем ε>0 $|x-a|<\varepsilon/2,\ \forall n>N_1$; $|x-b|<\varepsilon/2,\ \forall n>N_2$. Пусть $N=\max\{N_1;N_2\}$, тогда $\forall n>N$ выполняются оба неравенства

      $\Leftrightarrow |a-b|=|a-x_n+x_n-b|=|(a-x_n)-(b-x_n)|\le|x_n-b|+|x_n-a|<\varepsilon/2+\varepsilon/2<\varepsilon$

      итак, $|a-b|<\varepsilon,\ \forall\varepsilon>0$ => единственное неотрицательное число меньше любого положительного числа – ноль $\Leftrightarrow\ |a-b|=0$

   c. Сходящиеся последовательности – последовательность при $n\to\infty$ ограничена. Пусть $\{x_n\}\to a$, ε=1.

      Тогда $\exists N\in\mathbf{N} \Rightarrow |x_n|=|x_n-a+a|=|x_n-a|+|a|<1+|a|,\ \ \forall n>N$,

      Тогда $|x_n|\le M,\ \forall n>N$

   d. a является пределом последовательности $\{x_n\}$ тогда и только тогда, когда $\quad x_n=a+a_n\ \ \{a_n\}$- бесконечно малая

      Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\forall\varepsilon>0\ \exists N\in\mathbf{N},\ |x_n-a|<\varepsilon,\ \forall n>N$

      $a_n=x_n-a \Rightarrow x_n=a+a_n$ и $\{a_n\}\to 0$, тогда $a_n=x_n-a$, $|a_n-0|<\varepsilon,\ \forall n>N$;

      $|a_n-0|=|a_n|=|x_n-a|<\varepsilon,\ \forall n>N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a$

e. $\left.\begin{array}{l}\{x_n\}\text{-ограниченная}\\ \{a_n\}\text{-бесконечно малая}\end{array}\right\}$ $\{x_n \cdot a_n\}$-б.м.

$\{x_n\}$ – ограниченная => $\exists M>0$, такое, что $|x_n| \le M \ \forall n>N$

$\forall \varepsilon>0 \ \exists N \epsilon \mathbf{N}$ такое, что $|a_n| = |a_n - 0| < \varepsilon/M, \forall n>N$

$|x_n \cdot a_n| = |x_n| \cdot |a_n| = M\cdot(\varepsilon/M)=\varepsilon$, $\forall n>N$ отсюда

получаем $|x_n \cdot a_n| = |x_n \cdot a_n - 0| < \varepsilon, \forall n>N$ => $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot a_n) = 0$

f. $\lim_{n\to\infty} x_n = a, \lim_{n\to\infty} y_n = b \Leftrightarrow$

1. $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm a_n) = a \pm b$
2. $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot a_n) = a \cdot b$
3. $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

1. $\forall \varepsilon>0, \exists N_1,N_2 \epsilon \mathbf{N}$ такие, что

   $|x_n - a| < \varepsilon/2, \forall n>N_1$ $\quad |y_n - b| < \varepsilon/2, \forall n>N_2$

   $|(x_n \pm y_n)-(a \pm b)| = |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon/2+ \varepsilon/2=\varepsilon$
2. $\forall \varepsilon>0, \exists N \epsilon \mathbf{N}$ такое, что

   $|a_n - 0| = |a_n| < \sqrt{\varepsilon}$ $\quad |b_n - 0| = |a_n| < \sqrt{\varepsilon}$,$\forall n>N$

   $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – б.м. последовательности

   $|x_n \cdot a_n - 0| = |x_n \cdot a_n| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon} = \varepsilon$
3. Доказывается аналогично пункту 2

g. $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ сходятся к одному и тому же числу и ,$\forall n \epsilon \mathbf{N}$ т.е.

$x_n \le z_n \le y_n$, тогда $\{z_n\}$ так же сходится, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a, \forall \varepsilon>0, \ \exists N_1,N_2 \epsilon \mathbf{N}$ такие, что

$|x_n - a| < \varepsilon$, $\forall n>N_1$ $\quad |y_n - a| < \varepsilon$, $\forall n>N_2$

$\boxed{\begin{array}{l} x_n \epsilon (a-\varepsilon;a+\varepsilon) \\ y_n \epsilon (a-\varepsilon;a+\varepsilon)\end{array}}$ => $z_n \epsilon (a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ => $|z_n - a| < \varepsilon, \forall n>N_2$ => $\lim_{n\to\infty} z_n = a$

Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена $\{x_n\}=\left\{\frac{n^2-1}{\sqrt{n^4+1}}\right\}$, $n\in N$

$|x_n| = \left|\frac{n^2-1}{\sqrt{n^4+1}}\right| = \left|\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}} - \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}\right|$, т.к. $|a+b| \le |a| + |b|$;

$$|x_n| = \left|\frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}}\right| + \left|\frac{-1}{\sqrt{n^4+1}}\right| = \frac{n^2}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} = \frac{n^2}{\sqrt{n^4}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+1}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n^4+1}};$$

$\frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$ – имеет максимальное значение при n=1, т.е. знаменатель принимает минимальное значение.

$|x_n| < 1 + \frac{1}{\sqrt{1^4+1}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}}$ => $\exists M = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$, такое что $|x_n| \le M$, $\forall n \in \mathbf{N}$

Иными словами последовательность ограничена.